

Ricardo López-Ruiz y **Carmen Pellicer-Lostao** son profesores de informática e ingeniería de sistemas de la Universidad de Zaragoza y pertenecen al Instituto de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos de la Universidad de Zaragoza. Sus intereses se centran en la dinámica no lineal y los sistemas complejos; en particular, en la complejidad estadística, la criptografía caótica y la econofísica.



ECONOFÍSICA

Modelos matemáticos de la riqueza

La física de los gases arroja luz sobre la distribución de la riqueza en las sociedades capitalistas modernas

Ricardo López Ruiz y Carmen Pellicer Lostao

NOS GUSTE O NO, LA ECONOMÍA RIGE numerosos aspectos de nuestra vida personal y social. Por ello, siempre ha existido un gran interés por entender sus procesos mediante modelos que permitan explicar y predecir su comportamiento. Pero los sistemas económicos no se dejan modelizar con facilidad: las interacciones económicas entre los individuos de una sociedad son extremadamente numerosas y variadas, y pueden afectar a ámbitos tan dispares como el doméstico, el nacional o el internacional, y a

escalas de tiempo muy dispares. Estas dificultades volvieron a quedar patentes tras el estallido de la crisis financiera en 2008. La imposibilidad de predecirla y de estimar el alcance de sus efectos puso de manifiesto, una vez más, la insuficiencia de nuestros modelos matemáticos de la economía.

Un buen número de fenómenos económicos responde a lo que en física se conoce bajo el nombre de dinámica no lineal o dinámica de sistemas complejos: sistemas cuyo comportamiento colectivo no se puede explicar a partir de la simple superposición de sus partes constituyentes. Por ejemplo, son

EN SÍNTESIS

La econofísica recurre a métodos de la mecánica estadística y la física de sistemas complejos para modelizar los sistemas económicos.

Los modelos de tipo gas intentan explicar algunas propiedades de las transacciones económicas entre los agentes de una sociedad a partir de los mismos modelos que describen las interacciones entre las partículas de un gas.

Al introducir parámetros procedentes de una dinámica caótica, dichos modelos logran reproducir la transición entre las diferentes distribuciones de riqueza que se observan en las sociedades capitalistas modernas.

ANDREY VOLODIN/ISTOCKPHOTO

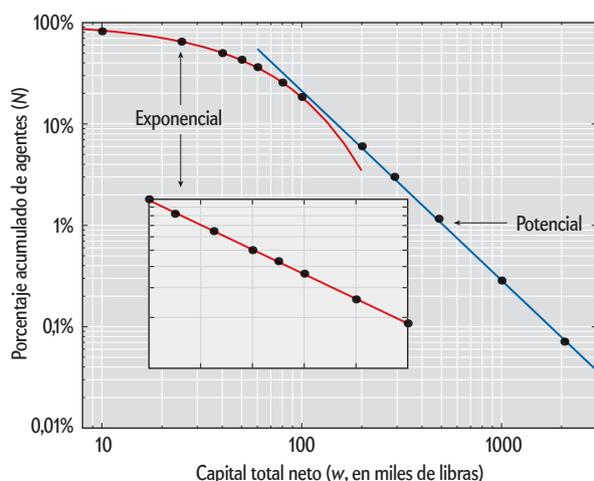




Clases medias y clases privilegiadas

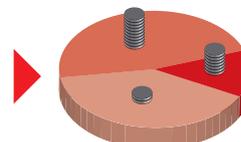
En las sociedades capitalistas modernas existen dos grupos bien diferenciados. En torno al 95 por ciento de la población (las clases medias y bajas) se reparte los bienes según una distribución exponencial. Ello significa que, si la renta media de ese sector de la población es w_0 , la probabilidad de que un individuo posea una renta w es proporcional a $\exp(-w/w_0)$. Por su parte, las clases privilegiadas se reparten los bienes según una distribución potencial: la probabilidad de que un individuo posea cierta renta w es proporcional a $1/w^p$, donde p es una constante positiva (abajo).

Los repartos exponenciales resultan mucho más equitativos que los potenciales (derecha). Aunque las clases privilegiadas son minoría y acumulan mucha más renta media por individuo que las clases medias o altas, el reparto que hacen entre sí del dinero que poseen sigue la «regla del 80-20»: el 20 % acumula el 80 % de dicha riqueza, y viceversa. En un reparto exponencial también se dan desigualdades, pero mucho menos acusadas. Además, casi la mitad de la población (aquellos individuos cuya renta se acerca más a la renta media) acumula la mitad de los bienes.



■ El 20 % de la población dispone del 80 % de la riqueza

■ El 80 % dispone del 20 %



- El 13 % de la población (renta alta) dispone del 40 % de la riqueza
- El 47 % (renta media) dispone del 50 %
- El 40 % (renta baja) dispone del 10 %

Reparto de bienes en el Reino Unido en el año 1996:

En el eje de abscisas se representa la renta (w) en escala logarítmica; en el de ordenadas, una escala logarítmica del porcentaje de la población (N) cuya renta es igual o superior a cierto valor. Obsérvese que para el 95 por ciento de la población, la curva es exponencial: $N(w) \sim \exp(-w)$, o $\log N(w) \sim -\exp(\log w)$. La gráfica interior representa la misma distribución en escala logarítmica frente a lineal ($\log N(w) \sim -w$). En cambio, para el 5 por ciento restante (las rentas más altas), la ley es potencial: $N(w) \sim 1/w^p$, o $\log N(w) \sim -p \log w$ (p es una constante positiva dependiente del modelo).

sistemas complejos aquellos que describen situaciones muy alejadas del equilibrio o los que exhiben comportamientos caóticos. Cabe preguntarse, por tanto, si es posible emplear métodos de física estadística para desarrollar modelos económicos realistas y eficientes. En los últimos años, este novedoso enfoque interdisciplinar, al que hemos dado en llamar econofísica, ha mejorado de manera considerable nuestra comprensión de los procesos económicos.

En este artículo nos centraremos en los denominados modelos de tipo gas. Estos intentan describir las interacciones económicas a partir de la analogía con uno de los sistemas físicos más sencillos que se conocen: un gas de partículas. A primera vista, la opción puede parecer descabellada. ¿Qué nos lleva a proponer semejante modelo para las interacciones económicas? La correspondencia entre ambos sistemas se establece en los siguientes términos: postularemos que los agentes económicos intercambian dinero o riqueza en sus transacciones comerciales de la misma forma en que las partículas en un gas intercambian energía en los choques. Y, al igual que los diferentes modelos de interacciones en un gas determinan sus propiedades, al considerar diversos tipos de transacciones económicas deberíamos recuperar distribuciones de riqueza distintas.

De cualquier manera, siempre podríamos objetar que los agentes económicos actúan movidos por cierta previsión e intencionalidad en sus decisiones de compraventa, características de las que carecen las partículas en un gas. Sin embargo, a

lo largo de los últimos años se ha demostrado que los modelos de tipo gas consiguen reproducir algunos de los patrones observados en los sistemas económicos capitalistas. En particular, mediante modelos sencillos de intercambio de dinero que incluyen componentes aleatorios, caóticos, o ambos, resulta posible explicar de manera cualitativa la distribución de riqueza de las sociedades occidentales.

DISTRIBUCIONES DE RIQUEZA

En primer lugar, debemos preguntarnos por los patrones que describen el reparto de bienes entre los individuos de una sociedad. Ya en el año 1906, Vilfredo Pareto, ingeniero, economista y sociólogo italiano, se planteó la misma pregunta. Pareto llegó a la conclusión de que el reparto de bienes de su sociedad se ajustaba a la «regla del 80-20»: mientras que el 80 % de la población se repartía el 20 % de la riqueza total, el 20 % restante disfrutaba del 80 % de los bienes. Pareto observó que semejante distribución no solo reproducía el reparto de tierras en la Italia de su época, sino que también se advertía en otros ámbitos. Por ejemplo, había observado que el 20 % de las vainas de guisantes de su jardín proporcionaban el 80 % de la cosecha.

¿Es así la distribución de riqueza en nuestras economías? No exactamente. Hoy en día sabemos que, en las sociedades capitalistas modernas, existen dos grupos bien diferenciados. Por un lado, alrededor del 95 % de la población (las clases medias y bajas) se reparten los bienes según una distribución exponen-

cial. Por otro, el 5 % restante (las rentas privilegiadas) distribuye su riqueza según una distribución potencial (*véase el recuadro «Clases medias y clases privilegiadas»*).

Una distribución exponencial de bienes significa que la probabilidad de que un agente posea una renta determinada viene dada por una función exponencial de dicha renta. Supongamos que el salario medio de ese 95 % de la población asciende a 1500 euros mensuales. Denominemos «rentas bajas» a aquellas inferiores a 750 euros, «rentas medias» a las situadas entre 750 y 3000 euros, y «rentas altas» a las que superan los 3000 euros mensuales. Una distribución exponencial implica que un 40 % de la población es de renta baja y se reparte el 10 % de la masa salarial; el 47 % cuenta con una renta media y se distribuye el 50 %, y el 13 % de la población disfruta de una renta alta y se embolsa el 40 % de la riqueza total. En particular, nótese que casi la mitad de la población es de renta media y acumula la mitad de los bienes totales de los que disponen las clases medias y bajas.

Esos porcentajes están calculados considerando la sociedad como una agrupación de individuos. No podemos olvidar, sin embargo, que la célula básica de la organización social no es el individuo, sino la familia. Así, si se recalculan esos porcentajes teniendo en cuenta este hecho, las estadísticas mejoran y presentan una sociedad más equitativa. Consideremos el ejemplo de una familia en la que uno de los miembros de la pareja disfruta de una renta media (por ejemplo, 1500 euros), mientras que el

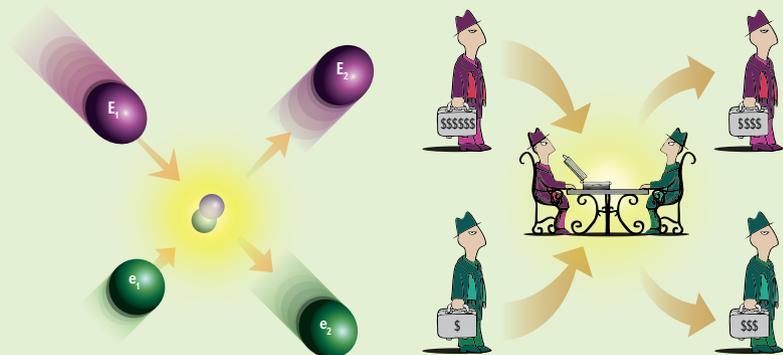
otro solo dispone de una renta baja (digamos, 700 euros): en promedio, ambos reciben una renta media, con un montante de 1100 euros para cada uno. Este efecto recombinatorio por pares de los individuos implica un reparto de riqueza más equilibrado.

Por otra parte, el grupo de las rentas privilegiadas, compuesto por el 5 % de la población, posee normalmente entre el 20 y el 40 % de la riqueza total de la sociedad. Ello significa que la riqueza media por agente de la clase privilegiada es unas cinco veces superior a la riqueza media por agente de las clases medias y bajas. Pero ¿cómo se reparten esos agentes privilegiados la riqueza que poseen? Justamente, conforme a la regla de Pareto que mencionábamos más arriba. Una distribución potencial quiere decir que la probabilidad de que uno de esos agentes posea una renta determinada viene dada por una potencia inversa de dicha renta. Tales distribuciones son, precisamente, las que inducen repartos conforme a la regla del 80-20. Los números 80 y 20 son aproximados y dependen del exponente concreto que rige la ley de potencias que determina la distribución, pero el comportamiento cualitativo es siempre el mismo: un K % de la clase privilegiada tiene acceso al $(100-K)$ % de la riqueza de la que dispone el grupo, y viceversa (donde K es distinto de 50).

Pero la característica principal de una distribución semejante reside en su fuerte inhomogeneidad: el reparto de dinero que hacen entre sí los agentes de las clases privilegiadas es, con diferencia, mucho menos equitativo que el reparto entre las cla-

Modelos de tipo gas

El reparto de bienes en las sociedades capitalistas puede describirse mediante los modelos matemáticos que se emplean en el estudio de los gases. En numerosos aspectos, las transacciones económicas son análogas al intercambio de energía que las partículas de un gas experimentan en los choques.



Principio de conservación

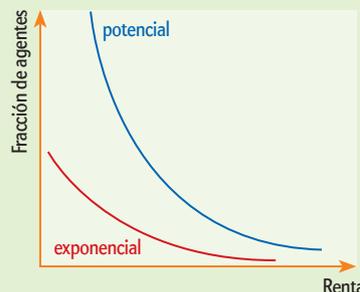
Al igual que ocurre con la energía total de las partículas de un gas tras un choque (izquierda), en una transacción económica la cantidad total de dinero se conserva (derecha).

Clases medias y bajas: distribución exponencial

En un gas de partículas que se mueven libremente, la distribución de energías en el equilibrio sigue una ley exponencial: si T es la temperatura del gas, la probabilidad de encontrar una partícula con energía E resulta proporcional a $\exp(-E/T)$. Se trata del mismo tipo de distribución que hallamos en el reparto de bienes de la mayor parte de la población (clases medias y bajas, rojo). La renta de un agente es análoga a la energía de una partícula; la renta media, a la temperatura del gas. En este modelo económico los agentes interactúan al azar e intercambian siempre una fracción aleatoria de dinero.

Clases altas: distribución potencial

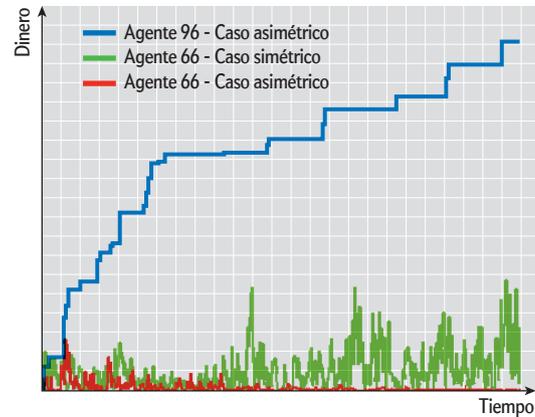
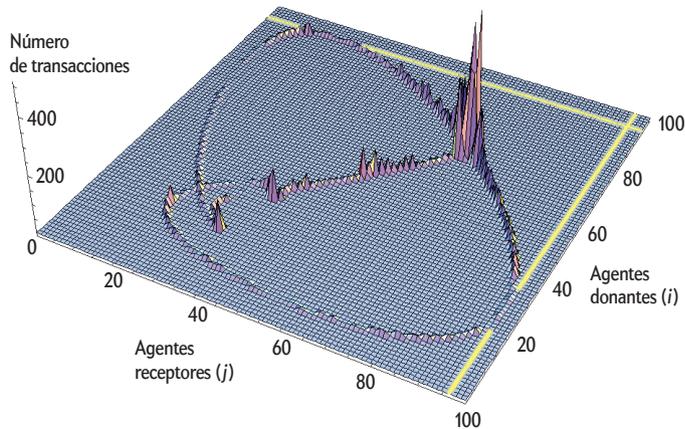
En las clases altas el reparto de bienes no es exponencial, sino potencial: la probabilidad de hallar a un agente con una renta es proporcional a una potencia inversa de dicha renta (azul). Dicha distribución se recupera cuando introducimos un «coeficiente de ahorro» para cada agente: una fracción de sus bienes que nunca se juega en sus intercambios de dinero.



Correlaciones caóticas

Si bien a corto plazo las transacciones económicas entre individuos son deterministas (los agentes no interactúan al azar y sus motivaciones están bien definidas), la evolución de una economía real resulta impredecible a largo plazo. En física, ese comportamiento se corresponde con el que exhiben los sistemas caóticos. Es posible introducir una componente caótica en los modelos de tipo gas para simular este comportamiento de la economía. Si, además, se incorporan asimetrías en el mecanismo que genera la señal caótica, se producirán desigualdades en el reparto de la riqueza.

Por ejemplo, los pares (i, j) de agentes que interactúan pueden seleccionarse mediante una dinámica caótica. De esta manera, al igual que en las economías reales, unos agentes interaccionarán entre sí más que otros (*izquierda*). La figura muestra el número de interacciones que realiza cada par en una red de 100 agentes. Por ejemplo, las interacciones del agente 96 (*amarillo*) muestran que este actúa como receptor frente a los agentes 21-39. A su vez, nunca actúa como donante, lo que implica su inevitable enriquecimiento, al tiempo que otros agentes se empobrecen (*derecha*).



ses medias y bajas. Además, la regla del 80-20 es aplicable a todas las escalas: cualquier subgrupo de privilegiados que escogiésemos seguiría verificando la misma regla. Esta ausencia de escalas es precisamente lo que caracteriza a la distribución potencial, motivo por el que también se conoce bajo el nombre de distribución libre de escala.

MODELOS DE TIPO GAS

¿Qué relación guardan los modelos de tipo gas con las dos clases de distribuciones de las que hemos venido hablando? Una primera indicación proviene de un resultado elemental en mecánica estadística: cuando se alcanza el equilibrio, la distribución de energías en un gas de partículas que se mueven libremente es, precisamente, una distribución exponencial. Es decir, las partículas de un gas se reparten la energía de la misma manera en que las clases medias y bajas se reparten sus bienes. En particular, la renta media es el análogo a la temperatura del gas.

La dinámica mediante la cual se obtiene una distribución exponencial es la siguiente: (1) partimos de un conjunto de agentes, todos ellos con la misma cantidad inicial de dinero; (2) se permiten transacciones binarias aleatorias; es decir, en cada momento se permite un intercambio de bienes entre un donante y un receptor escogidos al azar; (3) se decide, también de manera aleatoria, una proporción de la riqueza media que ambos poseen; (4) se traspasa dicha cantidad, cuando sea posible, del agente donante al que le ha tocado en suerte ser receptor. Si dejamos evolucionar este gas de agentes, la distribución asintótica resultante coincide con la distribución exponencial. Observemos que, en este modelo, todos los componentes son aleatorios: tanto las parejas de agentes que interaccionan en cada

instante como la fracción de su dinero que intercambian. Dado que cada interacción local conserva el dinero, la dinámica global también es conservativa y la suma total de dinero permanece constante con el tiempo.

¿Cómo podemos recuperar la distribución de Pareto? Para modelizar con un gas de agentes este tipo de comportamiento es necesario introducir una hipótesis de inhomogeneidad: cada agente presenta un coeficiente de ahorro propio que toma un valor entre cero y uno. Dicho coeficiente expresa la proporción de dinero que cada individuo no se juega en sus interacciones con el resto. Así, si partimos de un gas de agentes donde inicialmente todos poseen la misma cantidad de dinero y lo dejamos evolucionar mediante interacciones binarias al azar (pero sujetas a la condición que impone su coeficiente de ahorro), la distribución asintótica de reparto resulta ser una distribución potencial. Hagamos notar que, también aquí, el coeficiente de ahorro de cada agente se determina de manera aleatoria.

SISTEMAS CAÓTICOS

Vista la capacidad de los modelos de tipo gas para reproducir las distribuciones de riqueza de una manera tan simple, quizá sea posible dar otro paso hacia una modelización más acorde con la realidad. Desde un punto de vista a corto plazo, la economía tiene un claro componente determinista. Ello es consecuencia de unos intereses bien definidos, ya que, en principio, los agentes económicos no realizan sus transacciones al azar, sino que persiguen algún tipo de beneficio. A pesar de ello, el resultado global a largo plazo es totalmente impredecible, como demuestran las recurrentes crisis económicas que han asolado a la sociedad a lo largo de la historia. Un determinismo a corto plazo y una impredecibilidad a escalas de tiempo grandes son

justamente dos propiedades intrínsecas a todo sistema caótico. Así, parece conveniente sustituir el componente aleatorio de los modelos anteriores por uno caótico.

Podemos entender con facilidad en qué consiste un sistema caótico si imaginamos un panadero moldeando la masa del pan. Cuando agrega sal a la masa, es posible seguir la evolución de los granos de sal durante los primeros pliegues de la masa, pero perderemos su rastro conforme se van reiterando los pasos y realizando la mezcla. Obsérvese que, a largo plazo, el resultado final sería como haber salado la masa de forma aleatoria, por más que inicialmente fuese colocada toda junta en un mismo lugar. Así pues, las diferencias fundamentales entre el comportamiento de un sistema caótico y otro aleatorio tienen que ver, sobre todo, con el comportamiento a corto plazo; el comportamiento a largo plazo en ambos casos puede considerarse similar.

La introducción de un componente caótico puede realizarse por dos vías. Por un lado, es posible seleccionar de manera caótica qué pares de agentes interactúan. Por otro, puede establecerse caóticamente el coeficiente de reparto que emplean los agentes en cada interacción. El uso de una dinámica caótica en la selección de pares implica que los agentes no interactúan al azar con el resto. Debido a las correlaciones que se derivan de una señal caótica, los agentes interactúan con mayor probabilidad con un grupo de agentes de su entorno. Sin embargo, como consecuencia de la impredecibilidad de la señal, también lo harán con agentes más alejados.

En el modelo de tipo gas, los conceptos de «cercanía» y «lejanía» se definen a partir de la distancia en la red de agentes que define el etiquetamiento inicial y que permite la identificación de los mismos. Este detalle hace más razonable el modelo, ya que, en la vida cotidiana, los individuos solemos interactuar con un grupo de agentes locales más o menos fijo (frutero, peluquero, etcétera) y con otros grupos fluctuantes de agentes ajenos al entorno (grandes centros comerciales o comercio electrónico).

DE UNA DISTRIBUCIÓN A OTRA

Cuando el caos empleado en el modelo económico de tipo gas procede de un sistema caótico con algún tipo de simetría especular, podemos generar una señal que selecciona los agentes de manera simétrica. Es decir, los dos miembros de un par (i, j) cuentan con la misma probabilidad de ser el donante o el receptor de la transacción. De esta manera, la transferencia de dinero fluye indistintamente del agente i al agente j , o viceversa. En tal caso, el resultado final es idéntico al del caso aleatorio: los agentes resultan indistinguibles y la distribución asintótica de la riqueza es exponencial.

Sin embargo, cuando la simetría especular del sistema caótico se rompe, ello afecta a la dinámica del sistema económico. El resultado neto puede traducirse en la existencia de un pequeño grupo de agentes que, la mayor parte de las veces, aparecen como receptores. Además, ello viene determinado únicamente por los parámetros iniciales del modelo. Si se hace crecer esta asimetría, aparecen incluso agentes que nunca pierden. De esta forma, dichos individuos acumulan la mayor parte de los bienes totales; su riqueza aumenta con el tiempo, mientras que el resto se empobrece. La distribución final es de tipo potencial entre el pequeño grupo de agentes ganadores, mientras la mayoría de los individuos conforma una masa de agentes empobrecidos que se reparten la riqueza conforme a una distribución exponencial.

Queda patente la importancia que reviste en un sistema económico la simetría en las transacciones comerciales: un agen-

te puede acabar en el grupo de las clases favorecidas dependiendo de las circunstancias y de su posición social inicial. Si esto es extrapolable a toda la sociedad, podríamos afirmar que el «sueño americano» solo se realizaría en una sociedad con reglas de comercio simétricas y en la que todos sus individuos cuentan con las mismas oportunidades para ganar o perder. Sin embargo, la realidad suele alejarse de esta premisa: siempre suele haber un pequeño porcentaje de agentes que parten con ventaja con respecto a los demás.

Esto es todavía más acusado en las economías de países emergentes, donde las relaciones de poder entre las clases sociales determinan con más fuerza los grupos de agentes ganadores. Grupos de poder bien establecidos pueden acabar acumulando un gran porcentaje de la riqueza del país.

Vemos pues que los modelos de tipo gas constituyen una modelización sencilla pero a la vez elocuente de las transacciones económicas y los repartos de riqueza que estas generan. Por un lado, unas reglas de juego simétricas (con interacciones aleatorias o caóticas) dan lugar a una distribución exponencial de la riqueza: aquella que, en nuestras sociedades, afecta a la gran mayoría de la población. Por otra parte, la ruptura de la simetría en las interacciones entre agentes provoca que una fracción de ellos acumule gran parte de la riqueza total. La distribución de riqueza entre ese grupo de privilegiados resulta ser la distribución de Pareto, la misma que en nuestras sociedades rige el reparto de bienes de las clases altas.

Los modelos expuestos aquí para explicar la transición entre la distribución exponencial y la potencial complementan a otros existentes en la bibliografía. Uno de los autores (López-Ruiz) y otros colaboradores han propuesto un modelo que reproduce la misma transición de distribuciones al modificar el número de vecinos con los que interactúa un agente en un modelo económico determinista.

Con toda probabilidad, en los próximos años la econofísica dará lugar a nuevos avances en lo que a nuestra comprensión de los sistemas económicos se refiere. Ese conocimiento debería emplearse para implementar políticas de mayor equidad social así como para, en la medida de lo posible, predecir el comportamiento de los mercados con el objetivo de evitar futuras crisis.

PARA SABER MÁS

Geometrical derivation of the Boltzmann factor. R. López-Ruiz, J. Sañudo y X. Calbet en *American Journal of Physics*, vol. 76, págs. 780-781; 2008.

Statistical mechanics approach to Econophysics. V. M. Yakovenko en *Encyclopedia of Complexity and System Science*, dirigido por R. A. Meyers, págs. 2800-2826. Springer, Berlín, 2009.

Transition from Pareto to Boltzmann-Gibbs behavior in a deterministic economic model. J. González-Estévez, M. G. Cosenza, O. Alvarez-Llamoza y R. López-Ruiz en *Physica A*, vol. 388, págs. 3521-3526; 2009.

A chaotic gas-like model for trading markets. C. Pellicer-Lostao y R. López-Ruiz en *Journal of Computational Science*, vol. 1, págs. 24-32; 2010.

Econophysics: An introduction. S. Sinha, A. Chatterjee, A. Chakraborti y B. K. Chakrabarti. Wiley-VCH, Berlín, 2010.

A corto plazo, la economía tiene un claro componente determinista; sin embargo, los resultados a largo plazo son impredecibles. Esas son dos propiedades intrínsecas a todo sistema caótico